

Jednostranné limity – limita zleva, limita zprava

Budeme zkoumat, jak se chová funkce, když se hodnoty proměnné x k bodu a přibližují **zprava** (od větších hodnot) – v **pravém okolí** nebo **zleva** (od menších hodnot) – v **levém okolí** bodu a .

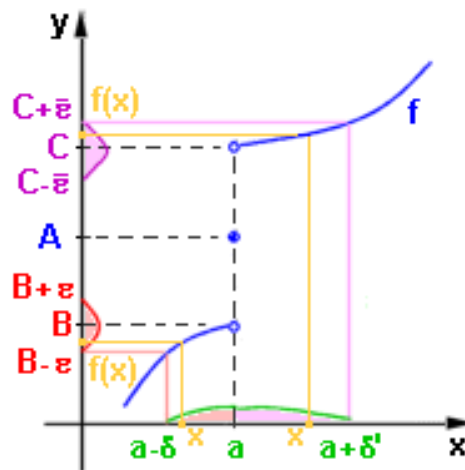
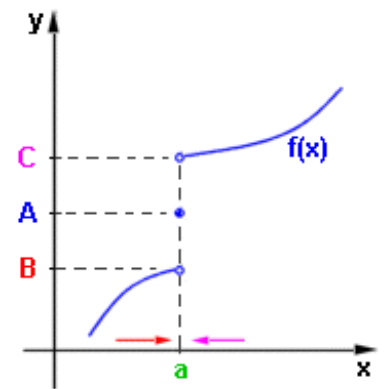
Funkce $f: y = f(x)$ na obrázku má v bodě a hodnotu $f(a) = A$, ale číslo A není limitou $f(x)$ v bodě a (f není ani v bodě a spojitá).

Blížíme-li se k bodu a **zleva** ($x < a$), blíží se hodnota funkce $f(x)$ číslu B funkce f má v bodě a **limitu zleva** číslo B a zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = B$

$$0 < a - x < \delta \dots x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$$

Blížíme-li se k bodu a **zprava** ($x > a$), blíží se hodnota funkce $f(x)$ číslu C funkce f má v bodě a **limitu zprava** číslo C a zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = C$

$$0 < x - a < \delta \dots x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$$



Limita zleva funkce $f(x)$ v bodě a je číslo B , pro které platí:

ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo δ , že $|f(x) - B| < \varepsilon$ pro všechna x , pro která platí $0 < a - x < \delta$.

Zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = B$

Limita zprava funkce $f(x)$ v bodě a je číslo C , pro které platí:

ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo δ , že $|f(x) - C| < \varepsilon$ pro všechna x , pro která platí $0 < x - a < \delta$.

Zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = C$

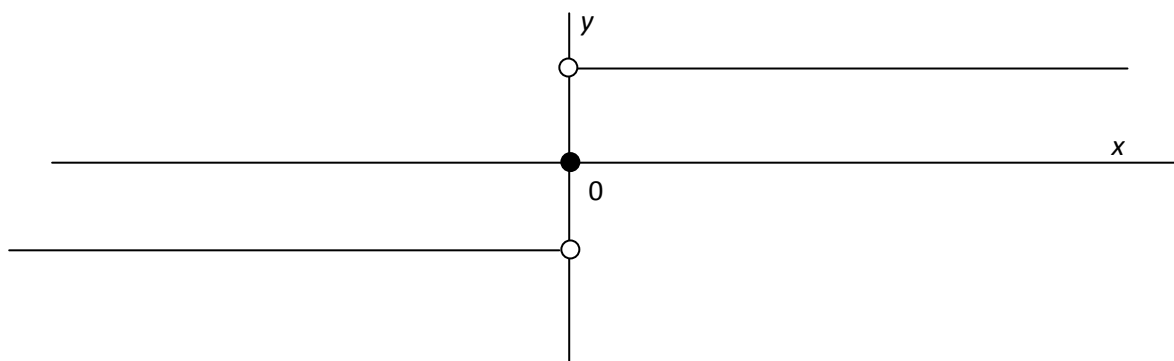
Symbolicky:

Funkce f má v bodě a limitu zleva $B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x: 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$
 $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (B - \varepsilon, B + \varepsilon)$

Funkce f má v bodě a limitu zprava $C \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x: 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon$
 $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$

Funkce $f(x)$ má v bodě a limitu právě tehdy, má-li v bodě a limitu zprava i zleva a jsou-li si tyto **limity rovny**: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Zkusme zkoumat funkci $y = \operatorname{sgn} x$ (nebo také $y = \frac{|x|}{x}$) v okolí nuly:



Funkce není v bodě 0 spojitá a pro limitu v bodě 0 zprava platí (hodnoty x jsou kladné, proto $|x| = x$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \text{ neboli } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$$

Pro limitu v bodě 0 zleva platí (hodnoty x jsou záporné, proto zde $|x| = -x$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \text{ neboli } \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$$

Limita této funkce v bodě $x = 0$ tedy neexistuje (jednostranné limity se nerovnjí)

Navíc funkční hodnota existuje a je $f(0) = 0 \neq \pm 1$

Vypočtete limity zprava a zleva v bodech nespojitosti $(2, 3, \pm 1, 0)$

$$y = \operatorname{sgn}(x + 2), \quad y = \operatorname{sgn}(x - 3) - 2, \quad y = \operatorname{sgn}(|x| - 1), \quad y = 2^x \cdot \operatorname{sgn} x$$

[* další možnosti cvičení: $y = (x - 2)(x - 3) + \operatorname{sgn}(x - 1)$, $y = x(x - 2) + \operatorname{sgn}(x - 1)$... limity v bodě 1]

Funkce $y = \operatorname{sgn}(x - 2)$ nemá v bodě 2 limitu, má pouze limitu zprava a zleva a ty jsou různé

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = -1$$

Pro $x > 2$ z pravého okolí bodu 2 je výraz $x - 2$ kladný

Pro $x < 2$ z levého okolí bodu 2 je čitatel upraven na $2 - x$